

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2024

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη ιδιότητας λογαρίθμων, σελίδα 175 σχολικού βιβλίου.

Α2. Ορισμός μονοτονίας συνάρτησης, σελίδα 31 σχολικού βιβλίου.

Α3. Σωστή απάντηση η Β) $x - 3y = -5$.Το $(\Sigma) \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (1, 2)$ αφού $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = -5 \end{cases} \Big|_{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + 6y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 14 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$

Α4. α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0$.Πιθανές ακέραιες ρίζες οι $\pm 1, \pm 2$.Κάνουμε σχήμα Horner για $\rho = 1$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2024
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2ΓΑ(α)

1	0	1	-2	$\rho = 1$
↓	1	1	2	
1	1	2	0	

Από την ταυτότητα της διαίρεσης παίρνουμε

$$x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2) \text{ άρα } (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 1 = 0 \text{ ή } x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Η εξίσωση $x^2 + x + 2 = 0$ είναι αδύνατη στο σύνολο $\mathbb{R}$ αφού

$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0.$$

Άρα η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

B2. Αφού τα $P(x), Q(x)$ έχουν κοινή λύση, η $x = 1$ είναι ρίζα και του πολυωνύμου $Q(x)$.

$$\text{Άρα } Q(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - a + 11 - a = 0 \Leftrightarrow 12 = 2a \Leftrightarrow a = 6.$$

$$\text{Για } a = 6 \text{ είναι } Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, x \in \mathbb{R}.$$

B3. $Q(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leq 0.$

Κάνουμε σχήμα Horner για το $Q(x)$ και $\rho = 1$.

1	-6	11	-6	$\rho = 1$
↓	1	-5	6	
1	-5	6	0	

$$\text{Έτσι } x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) \text{ οπότε}$$

$$(x - 1)(x^2 - 5x + 6) \leq 0.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 5x + 6 = 0$ είναι οι 2, 3.

$$\text{Άρα } Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = 3.$$

Κάνουμε πίνακα προσήμου:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
$x - 1$	—	○	+	+	+		
$x^2 - 5x + 6$	+	+	○	—	○	+	
$Q(x)$	—	○	+	○	—	○	+

Από τον πίνακα προκύπτει ότι $Q(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [2, 3]$.

B4. Α' τρόπος

Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης $y = Q(x)$ κατά μία μονάδα προς τα αριστερά. Αφού η γραφική παράσταση της $y = Q(x)$ τέμνει τον $x'x$ άξονα στα σημεία

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ η C_f θα τέμνει τον $x'x$ άξονα στα σημεία με τετμημένη $x'_1 = 0, x'_2 = 1, x'_3 = 2$.

Άρα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$ άξονα τα $A(0,0), B(1,0)$ και $\Gamma(2,0)$.

Β' τρόπος

Θα λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow Q(x+1) = 0$.

Θέτουμε $u = x + 1$ οπότε η εξίσωση γίνεται $Q(u) = 0$. Η τελευταία έχει ρίζες $u = 1$ ή $u = 2$ ή $u = 3$ και επειδή ισχύει $x = u - 1$ παίρνουμε $x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = 2$.

Άρα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$ άξονα τα $A(0,0), B(1,0)$ και $\Gamma(2,0)$.

Γ' τρόπος

Αφού $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ θα είναι

$$f(x) = Q(x+1) = (x+1)^3 - 6(x+1)^2 + 11(x+1) - 6 \text{ ή}$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 6x^2 - 12x - 6 + 11x + 11 - 6 \text{ ή}$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 2.$$

Άρα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$ άξονα τα $A(0,0), B(1,0)$ και $\Gamma(2,0)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες της αναγωγής στο 1^ο τεταρτημόριο παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 & \bullet \sin(21\pi - \theta) = \sin(20\pi + \pi - \theta) = \sin(\pi - \theta) = -\sin\theta \\
 & \bullet \cos(17\pi + \theta) = \cos(16\pi + \pi + \theta) = \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta \\
 & \bullet \varepsilon\varphi\left(\frac{21\pi}{2} - \theta\right) = \varepsilon\varphi\left(10\pi + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\varphi\theta \\
 & \bullet \eta\mu\left(\frac{19\pi}{2} - \theta\right) = \eta\mu\left(\frac{20\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \eta\mu\left(10\pi - \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\
 & = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(-\theta) = -\sin\theta
 \end{aligned}$$

Άρα

$$A = \frac{-\sin\theta \cdot \sigma\varphi\theta}{\sigma\varphi\theta \cdot (-\sin\theta)} = 1$$

οπότε ο τύπος της f γίνεται $f(x) = 2 \cdot \sin 2x + B$.

Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\kappa\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 & \Leftrightarrow 2\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + B = -2 \Leftrightarrow 2 \cdot \sin\pi + B = -2 \Leftrightarrow \\
 -2 + B & = -2 \Leftrightarrow B = 0.
 \end{aligned}$$

Γ2. Έχουμε $f(x) = 2 \cdot \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Θα λύσουμε την εξίσωση $f(x) = -2$ για $x \in [-\pi, \pi]$.

$$f(x) = -2 \Leftrightarrow 2 \cdot \sin 2x = -2 \Leftrightarrow \sin 2x = -1$$

Αντικαθιστώντας το -1 με $\sin\pi$ παίρνουμε

$$\sin 2x = \sin\pi \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi + \pi \text{ ή } 2x = 2\kappa\pi - \pi \Leftrightarrow$$

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

• Για $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ και $x \in [-\pi, \pi]$ παίρνουμε

$$-\pi \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \leq \pi \Leftrightarrow -\pi - \frac{\pi}{2} \leq \kappa\pi \leq \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{-3\pi}{2} \leq \kappa\pi \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{3}{2} \leq \kappa \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{\kappa \in \mathbb{Z}} \kappa = -1 \text{ ή } \kappa = 0.$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2024
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2ΓΑ(α)

Για $\kappa = -1$: $x = -\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2}$

$\kappa = 0$: $x = \frac{\pi}{2}$

- Για $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{2}$ και $x \in [-\pi, \pi]$ έχουμε

$$-\pi \leq \kappa\pi - \frac{\pi}{2} \leq \pi \Leftrightarrow -\pi + \frac{\pi}{2} \leq \kappa\pi \leq \pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{-\pi}{2} \leq \kappa\pi \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2} \leq \kappa \leq \frac{3}{2} \stackrel{\kappa \in \mathbb{Z}}{\Rightarrow} \kappa = 0 \text{ ή } \kappa = 1.$$

Για $\kappa = 0$: $x = -\frac{\pi}{2}$

$\kappa = 1$: $x = \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

Άρα τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και της $y = -2$ είναι $A(-\frac{\pi}{2}, -2)$ και $B(\frac{\pi}{2}, -2)$.

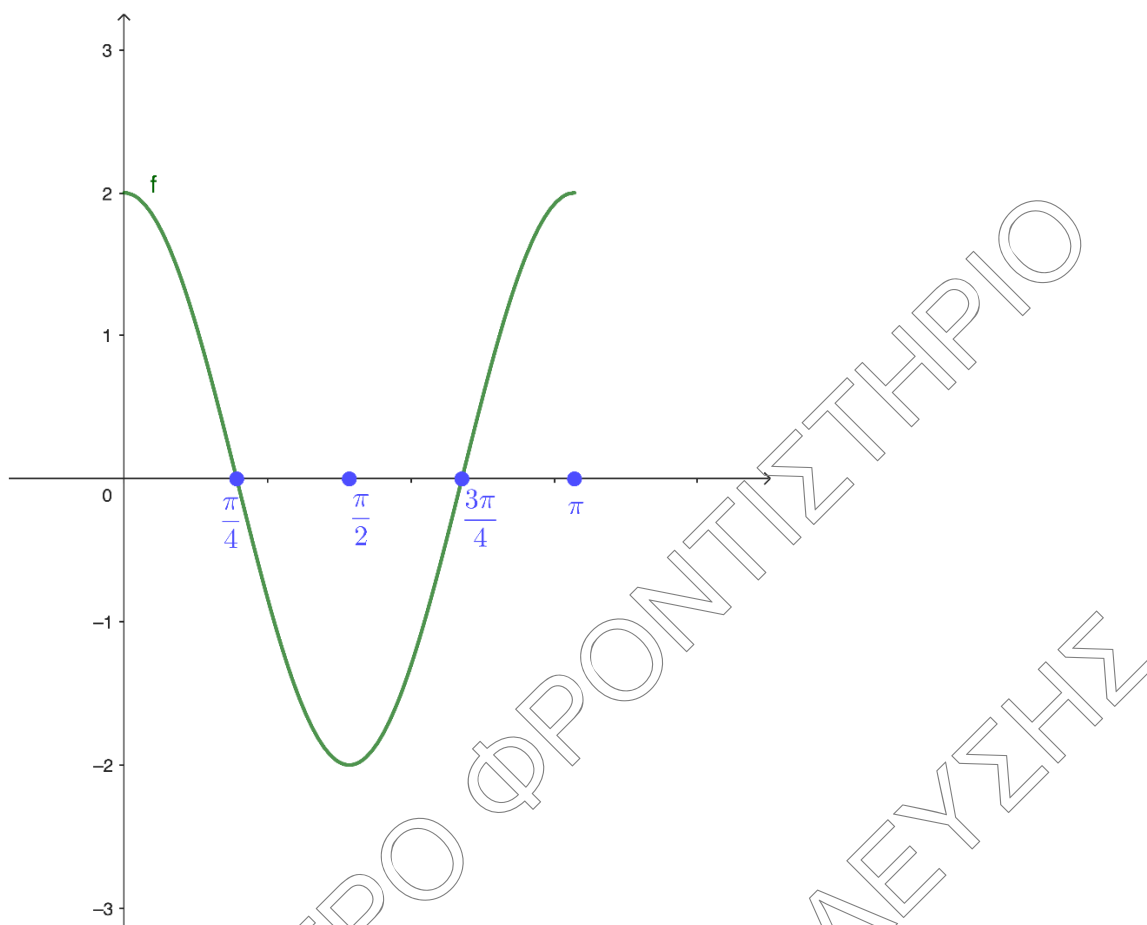
Γ3. Για την $f(x) = 2 \cdot \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, μέγιστη τιμή την 2 και ελάχιστη τιμή την -2 .

Πίνακας τιμών για $x \in [0, \pi]$:

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin 2x$	1	0	-1	0	1
$f(x) = 2 \cdot \sin 2x$	2	0	-2	0	2

Η γραφική παράσταση της f στο $[0, \pi]$:



Γ4. Γνωρίζουμε ότι η μέγιστη τιμή της f στο $\mathbb{R}$ είναι η 2 δηλαδή $f(x) \leq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $e^x > 0 \Leftrightarrow e^x + 2 > 2$.

Άρα δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x) = e^x + 2 \Leftrightarrow 2\sin 2x = e^x + 2$ δηλαδή, η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού το 2 ρίζα της $f(x)$ θα είναι $f(2) = 0 \Leftrightarrow$

$$2^{v+2} - 5 \cdot 2^{2v-2} + 4 \cdot 2^{v-2} = 0 \Leftrightarrow 2^v \cdot 2^2 - 5 \cdot \frac{2^{2v}}{2^2} + 4 \cdot \frac{2^v}{2^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot 2^v - 5 \cdot \frac{2^{2v}}{4} + 4 \cdot \frac{2^v}{4} = 0 \Leftrightarrow 16 \cdot 2^v - 5 \cdot 2^{2v} + 4 \cdot 2^v = 0 \Leftrightarrow$$

$$20 \cdot 2^v = 5 \cdot 2^{2v} \Leftrightarrow 4 \cdot 2^v = 2^{2v} \Leftrightarrow 2^{v+2} = 2^{2v} \Leftrightarrow v+2 = 2v \Leftrightarrow v = 2$$

Δ2. Για $\nu = 2$ ο τύπος της f γίνεται $f(x) = x^4 - 5 \cdot x^2 + 4, x \in \mathbb{R}^*$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 5 \cdot x^2 + 4 = 0, x \in \mathbb{R}^*$$

Θέτουμε $x^2 = \omega > 0$ οπότε η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - 5\omega + 4 = 0$ με ρίζες

$$\omega = 1 \text{ ή } \omega = 4.$$

$$\text{Άρα } x^2 = 1 \text{ ή } x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ ή } x = \pm 2.$$

Το τριώνυμο $\omega^2 - 5\omega + 4$ με ρίζες 1 και 4 γράφεται

$$\omega^2 - 5\omega + 4 = (\omega - 1) \cdot (\omega - 4) \text{ και θέτοντας για } \omega \text{ το } x^2 \text{ έχουμε}$$

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4), x \in \mathbb{R}^*$$

Για το πρόσημο της $f(x)$ έχουμε :

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	+	0	—	—	0	+
$x^2 - 4$	+	0	—	—	—	0	+
$f(x)$	+	0	—	0	+	0	+

Έτσι $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$ και

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, -1) \cup (1, 2).$$

Δ3. α) Για $f(x) = x^4 - 5 \cdot x^2 + 4, x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε

i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow -x \in \mathbb{R}^*$ και

$$f(-x) = (-x)^4 - 5 \cdot (-x)^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 = f(x)$$

άρα η f είναι άρτια.

ii. Αφού η f άρτια για κάθε $a \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f(-a) = f(a)$ οπότε

$$f(a) \cdot f(-a) = f(a) \cdot f(a) = f^2(a) \geq 0$$

β) Γνωρίζω ότι $\ln \frac{1}{x} = \ln 1 - \ln x = -\ln x$ οπότε η ανίσωση γίνεται

$$f(\ln x) \cdot f(\ln \frac{1}{x}) \leq 0 \Leftrightarrow f(\ln x) \cdot f(-\ln x) \leq 0 \quad (1)$$

Όμως από Δ3ii) έχω ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $f(a) \cdot f(-a) \geq 0$, οπότε θα είναι

$$f(\ln x) \cdot f(-\ln x) \geq 0 \quad (2).$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2024
Β' ΦΑΣΗ**E_3.Μλ2ΓΑ(α)**

Από (1) και (2) τελικά παίρνουμε $f(\ln x) \cdot f(-\ln x) = 0 \Leftrightarrow$

$$f(\ln x) \cdot f(\ln x) = 0 \Leftrightarrow f(\ln x) = 0.$$

Οι ρίζες της $f(x) = 0$ είναι οι -2, -1, 1, 2 οπότε παίρνουμε

$$\ln x = -2 \text{ ή } \ln x = -1 \text{ ή } \ln x = 1 \text{ ή } \ln x = 2 \Leftrightarrow$$

$$x = e^{-2} \text{ ή } x = e^{-1} \text{ ή } x = e \text{ ή } x = e^2, \text{ δεκτές ρίζες.}$$

Δ4. Για $x_0 > 0$ έχουμε

$$x_0 + \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -x_0 \Leftrightarrow e^{\ln x_0} = e^{-x_0} \Leftrightarrow \frac{x_0}{e^{-x_0}} = 1 \Leftrightarrow x_0 \cdot e^{x_0} = 1 \text{ άρα ο αριθμός } \rho = x_0 \cdot e^{x_0} \text{ είναι ρίζα της } f(x) = 0.$$